الفصل الأول :

1. $\frac{(1+i)^{15}}{128}=\frac{[(1+i)^2]^7(1+i)}{128}=\frac{(1+2i+i^2)^7(1+i)}{128}$

$=\frac{(2i)^7(1+i)}{128}=\frac{-128i(1+i)}{128}$

$=-i(1+i)=-i-i^2=-i+1=1-i$

2. $(1+i)^5-(1-i)^5$

3. $(1+i)^5=(1+i)^4(1+i)=[(1+i)^2]^2(1+i)=(1+2i+i^2)^2(1+i)$

$=(1+2i-1)^2(1+i)=(2i)^2(1+i)=4i^2(1+i)=-4(1+i)=-4-4i$

$(1-i)^5=(1-i)^4(1-i)=[(1-i)^2]^2(1-i)$

$=(1-2i+i^2)^2(1-i)$

$=(1-2i-1)^2(1-i)$

$=(-2i)^2(1-i)=4i^2(1-i)$

$=-4(1-i)=-4+4i$

س/ ضع ما يأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي $(3+2i)(-2+i)$ ؟

Sol :

$c=(3+2i)(-2+i)=-6+3i-4i+2i^2=-6-i-2=-8-i$

$\frac{1}{c}=\frac{1}{-8-i}=\frac{1}{-8-i}\cdot\frac{-8+i}{-8+i}=\frac{-8+i}{64+1}=\frac{-8}{65}+\frac{1}{65}i$

اثبت ان :

1. $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$

Sol :

$\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{1}{4-4i+i^2}-\frac{1}{4+4i+i^2}=\frac{1}{4-4i-1}-\frac{1}{4+4i-1}$

$=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}=\left(\frac{1}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}\right)-\left(\frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}\right)$

$=\frac{3+4i}{9+16}-\frac{3-4i}{9+16}\Rightarrow\frac{3+4i}{25}-\frac{3-4i}{25}=\frac{3+4i-3+4i}{25}=\frac{8}{25}i$

2. $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$

$\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=\frac{1-2i+i^2}{1+i}+\frac{1+2i+i^2}{1-i}=\frac{1-2i-1}{1+i}+\frac{1+2i-1}{1-i}$

$$\frac{-2i}{1+i}+\frac{2i}{1-i}=\left(\frac{-2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)+\left(\frac{2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)=\left(\frac{-2i+2i^2}{2}\right)+\left(\frac{2i+2i^2}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{-2-2i}{2}\right)+\left(\frac{-2+2i}{2}\right)=\left(\frac{-2}{2}-\frac{2i}{2}\right)+\left(\frac{-2}{2}+\frac{2i}{2}\right)=(-1-i)+(-1+i)\ =-2$$

3. $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$

Sol :

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=(1-i)[1-(-1)][1-(-i)]$$
$$=(1-i)(1+1)(1+i)$$
$$=2(1-i)(1+i)=2(1+1)=2(2)=4$$

ملاحظـــة

اذا كان لدينا عددان مركبان مترافقان وكان المطلوب ايجاد قيم $x\ ,\ y$ الحقيقية نطبق الخاصية $c=\bar{c}$ (أي) نجد المرافق مثلا للعدد الاول ونساويه مباشرة بالعدد الثاني) .

سـؤال / اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيمة كل من $x\ ,y\ \in R$ ؟ **(2017 د3 احيائي)**

Sol :

$$\frac{3-2i}{i}=\overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)}\quad\Rightarrow\frac{3-2i}{i}=\frac{x+yi}{1-5i}$$
$$xi+yi^2=3-15i-2i+10i^2\quad\Rightarrow xi-y=3-17i-10$$
$$xi-y=-7-17i\quad\Rightarrow\therefore x=-17\quad ,-y=-7\Rightarrow y=7$$

سـؤال / جد قيمة $X\ ,\ Y$ الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان ؟ **(2015 د3)**

Sol :

$$\overline{\frac{3+i}{2-i}}=\frac{6}{x+yi}\quad\Rightarrow\left(\frac{3-i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}\right)=\frac{6}{x+yi}\quad\Rightarrow\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}=\frac{6}{x+yi}$$
$$\frac{6-5i-1}{5}=\frac{6}{x+yi}\quad\Rightarrow\frac{5-5i}{5}=\frac{6}{x+yi}\quad\Rightarrow\frac{5}{5}-\frac{5}{5}i=\frac{6}{x+yi}$$
$$1-i=\frac{6}{x+yi}\Rightarrow x+yi=\frac{6}{1-i}\quad\Rightarrow x+yi=\frac{6}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}$$
$$x+yi=\frac{6+6i}{2}\quad\Longrightarrow x+yi=\frac{6}{2}+\frac{6}{2}i\Longrightarrow\ x+yi$$
$$=3+3i\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=3}\ ,\ \boxed{y=3}$$

إيجاد قيمة X,Y

1. نبسط المعادلة اولا أي نكتب الطرف الايمن والطرف الايسر بالصيغة العادية للعدد المركب (اما نضرب بالعامل المرافق او نفكك قوس او نضرب قوس في قوس).
2. انتبه لوجود التحليل (فرق مربعين ، تجربة ، فرق او مجموع مكعبين ، عدد ....) فهنا يجب ان نحلل ونختصر ولا ننسى ان نضيف $(-i^2)$ في حالة وجود (مجموع مربعين .... الخ)

$$\frac{9y^2+49}{3y+7i} = \frac{9y^2-49i^2}{3y+7i} = \frac{(3y-7i)(3y+7i)}{(3y+7i)} = 3y - 7i$$

3. لا نقوم بالضرب بالمرافق في حالة وجود x , y في كسر واحد (بسط او مقام) وحاول ان تجد مخرج اخر للحل حسب الصيغة
4. نكون معادلتين حيث الجزء الحقيقي للطرف الايمن يساوي الجزء الحقيقي للطرف الايسر والجزء التخيلي للطرف الايمن يساوي الجزء التخيلي للطرف الايسر .

نحلل المعادلتين انيا .

(2012 خارج ، 2015 تمهيدي)

1. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + (x+yi) = (1+2i)^2$

Sol :

$$\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) + (x+yi) = (1+4i+4i^2) \Rightarrow \frac{1-i-i+i^2}{1+1} + (x+yi) = 1+4i-4$$

$$\frac{1-2i-1}{1+1} + (x+yi) = -3+4i \Rightarrow \frac{-2i}{2} + x + yi = -3+4i \Rightarrow -i + x + yi = -3+4i$$

$$x + yi = -3 + 4i + i \Rightarrow \quad x + yi = -3 + 5i \Rightarrow \quad x = -3 \quad , \quad y = 5$$

2. $\frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$

Sol :

$$\left(\frac{2-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right)y = \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i}\right)$$

$$\left(\frac{2-2i-i+i^2}{1+1}\right)x + \left(\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}\right)y = \frac{-i}{-i^2} \qquad (-i^2 = 1)$$

$$\left(\frac{2-3i-1}{2}\right)x + \left(\frac{6-5i-1}{5}\right)y = -i \rightarrow \left(\frac{1-3i}{2}\right)x + \left(\frac{5-5i}{5}\right)y = -i$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)x + (1-i)y = -i \rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xi + y - yi = -i$$

$$\left(\frac{1}{2}x + y\right) + \left(-\frac{3}{2}x - y\right)i = 0 - i$$

$$\left[\frac{1}{2}x + y = 0\right] * 2 \rightarrow x + 2y = 0 \rightarrow x = -2y \quad \ldots\ldots (1$$

$$\left[-\frac{3}{2}x - y = -1\right] * 2 \rightarrow -3x - 2y = -2 \ldots\ldots\ldots (2$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2) :

$$-3(-2y) - 2y = -2 \rightarrow 6y - 2y = -2$$

$$4y=-2 \rightarrow y=\frac{-1}{2} \quad , \quad x=-2y=(-2)\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow x=1$$

ملاحظـــة

اذا كانت معاملات البسط مربعات لمعاملات المقام وبالعكس في هذه الحالة نحلل الحدود المربعة ونختصر .

سـؤال / جد قيمة $x , y \in R$ والتي تحقق $\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$ ؟

(تمارين عامة)

Sol :

$$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i} \Rightarrow \frac{y}{1+i}=\frac{x^2-4i^2}{x+2i} \Rightarrow \frac{y}{1+i}=\frac{(x-2i)(x+2i)}{(x+2i)}$$

$$\frac{y}{1+i}=x-2i \Rightarrow y=x-2i+xi-2i^2 \Rightarrow y=x-2i+xi+2$$

$$y+0i=(x+2)+(-2+x)i$$

$$y=x+2 \quad \ldots..(1) \quad ,0=-2+x \Rightarrow x=2 \quad ,y=x+2=2+2 \Rightarrow y=4$$

سـؤال / جد قيمتي $x , y \in R$ اذا علمت ان $\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$ ؟

(2018 د1 احيائي خارج)

Sol :

$$\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)} \Rightarrow \frac{x-yi}{x^2-y^2i^2}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$$

$$\frac{x-yi}{(x-yi)(x+yi)}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)} \Rightarrow \frac{1}{(x+yi)}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$$

$$x+yi=(1+xi)(3+i) \Rightarrow \quad x+yi=3+i+3xi+xi^2$$

$$x+yi=(3-x)+(1+3x)i$$

$$x=3-x \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \quad , \quad y=1+3x \Rightarrow y=1+\frac{9}{2} \Rightarrow y=\frac{11}{2}$$

سـؤال / اذا كان $c, d \in R$ وكان $c+di=\frac{7-4i}{2+i}$ جد $\sqrt{2c-di}$ ؟

Sol :

$$c+di=\frac{7-4i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{14-7i-8i+4i^2}{4+1}=\frac{14-15i-4}{4+1}=\frac{10-15i}{5}=2-3i$$

$$c+di=2-3i \quad \rightarrow \quad c=2 \ ,d=-3$$

$$\sqrt{2c-di}=\sqrt{4-(-3)i}=\sqrt{4+3i}$$

نفرض ان$(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد $4+3i \Leftarrow \quad 4+3i=(x+yi)^2$

$$4+3i=(x^2-y^2)+(2xy)i$$

$x^2-y^2=4 \;\dots\dots(1 \quad , \quad 2xy=3 \;\rightarrow y=\dfrac{3}{2x} \;\dots\dots(2$

نعوض معادلة (2) في معادلة(1) $\leftarrow$ $\quad x^2-\left(\dfrac{3}{2x}\right)^2=4 \;\rightarrow \left[x^2-\dfrac{9}{4x^2}=4\right].4\,x^2$

$4x^4-9=16x^2 \;\rightarrow\; 4x^4-16x^2-9=0 \;\rightarrow (2x^2-9)(2x^2+1)=0$

يهمل (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

either $\quad 2x^2+1=0$

OR $\;2x^2-9=0 \;\rightarrow 2x^2=9 \;\rightarrow x^2=\dfrac{9}{2} \rightarrow \boxed{x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}}$

$\rightarrow y=\dfrac{3}{\pm 2(\frac{3}{\sqrt{2}})} \;\rightarrow \boxed{y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما $\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right),\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right\}$

- ***حل المعادلة التربيعية في*** اذا كانت المعادلة التربيعية بالصورة $x^2+a=0$ نحول الى $x^2=-a$ ثم تحل بنفس طريقة الجذر التربيعي السابقة في حال كون a حقيقي سالب او تخيلي موجب او سالب .
- اذا كانت المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2+bx+c=0$ فيتم حلها بالتجربة ان امكن او بالقانون الخاص بالدستور

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

سؤال / حل المعادلات التربيعية الاتية وبين أي منها يكون جذراها مترافقان :

1. $x^2+4x+5=0 \qquad (a=1\,,b=4\,,c=5)$

Sol :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{16-(4)(1)(5)}}{2(1)}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{4}i}{2}==\frac{-4\pm 2i}{2}=\frac{-4}{2}\pm\frac{2i}{2}=-2\pm i$$

اذا مجموعة حل المعادلة هي : $\{(-2-i)\,,\;(-2+i)\}$ الجذران مترافقان

2. $z^2 = -12$

Sol :

$z = \pm\sqrt{-12} \Rightarrow z = \pm\sqrt{12}i \rightarrow z = \pm 2\sqrt{3}i$ الجذران مترافقان

ملاحظـــة

عندما نستخدم الدستور وينتج داخل الجذر عدد مركب كامل او بجزئه التخيلي في هذه الحالة نأخذ داخل الجذر ونحل بنفس طريقة الفرضية لايجاد الجذور التربيعية .

3. $z^2 - 3z + 3 + i = 0 \qquad (a = 1\ , b = -3,\ c = 3 + i)$

Sol :

$a = 1\ , b = -3\ , c = 3 + i$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - (4)(1)(3+i)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2}$$

$-3 - 4i = (x + yi)^2 \Leftarrow -3 - 4i$ نفرض ان$(x + yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد

$-3 - 4i = x^2 + 2xyi - y^2 \rightarrow -3 - 4i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = -3 \ \ldots\ldots (1) \quad , \ 2xy = -4 \ \Rightarrow y = \dfrac{-4}{2x} \Rightarrow y = \dfrac{-2}{x} \ \ldots\ldots (2)$

نعوض معادلة رقم (2) في معادلة رقم (1) $\qquad x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = -3$

$\left[x^2 - \dfrac{4}{x^2} = -3\right] * \ x^2 \ \Rightarrow x^4 - 4 = -3x^2 \Rightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 - 1)(x^2 + 4) = 0 \quad , \quad (x^2 + 4) = 0$ يهمل

$x^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$

either $x = 1 \ \Rightarrow y = \dfrac{-2}{1} = -2 \quad$, OR $x = -1 \ \Rightarrow y = \dfrac{-2}{-1} = 2$

$\sqrt{-3 - 4i} = \{\pm(1 - 2i)\}$ الجذران هما

نعوض احد الجذرين وليكن $1 - 2i$ عن قيمة $\sqrt{-3 - 4i}$

$$\therefore z = \frac{3 + (1 - 2i)}{2} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

$$\text{OR} \quad z = \frac{3 - (1 - 2i)}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

اذن مجموعة حل المعادلة $\{2-i \;,\; 1+i\}$ الجذران غير مترافقان

4. $2z^2-5z+13=0 \qquad (a=2\,,b=-5\,,c=13)$

Sol :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-(4)(2)(13)}}{2(2)}=\frac{5\pm\sqrt{25-104}}{4}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{-79}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{79}i}{4}=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{79}}{4}i$$

اذا مجموعة حل المعادلة هي : $\left\{\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{79}}{4}i\;,\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{79}}{4}i\right\}$ الجذران مترافقان

5. $z^2+2z+i(2-i)=0$

Sol :

$$z^2+2z+(2i-i^2)=0 \;\rightarrow\; z^2+2z+(1+2i)=0$$

$a=1 \;,\; b=2 \;,\; c=1+2i$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4\;(1)(1+2i)}}{2\;(1)}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4-4-8i}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8i}}{2}$$

$-8i=(x+yi)^2 \qquad \Leftarrow$ $-8i$ نفرض ان$(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد

$$-8i=x^2+2xyi-y^2 \;\rightarrow\; 0-8i=(x^2-y^2)+(2xy)i$$

$$x^2-y^2=0\,\dots\dots\dots(1 \quad,\quad 2xy=-8 \;\rightarrow y=\frac{-8}{2x}=\frac{-4}{x}\,\dots\dots(2$$

$x^2-\left(\frac{-4}{x}\right)^2=0 \;\rightarrow \left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right].x^2 \qquad \leftarrow$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1)

$$x^4-16=0 \;\rightarrow (x^2-4)(x^2+4)=0$$

either $x^2+4=0$ يهمل (لانه مجموع مربعين)

OR $x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow \boxed{x=\pm2} \quad , \quad y=-\left(\frac{4}{\pm2}\right)\rightarrow\boxed{y=\mp2}$

$\sqrt{-8i}=\{\pm(2-2i)\}$ الجذران هما

نعوض احد الجذرين وليكن $2-2i$ عن قيمة $\sqrt{-8i}$

$$\text{either} \quad z = \frac{-2 + (2 - 2i)}{2} = \frac{-2i}{2} = \boxed{-i}$$

$$\text{OR} \quad Z = \frac{-2 - (2 - 2i)}{2} = \frac{-2 - 2 + 2i}{2} = \frac{-4 + 2i}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{2}{2}i = \boxed{-2 + i}$$

اذن مجموعة حل المعادلة $\{-i\ , -2 + i\}$ الجذران غير مترافقان

6. $4z^2 + 25 = 0$

Sol :

$$4z^2 = -25 \ \rightarrow z^2 = \frac{-25}{4} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{-25}{4}} \ \rightarrow \boxed{z = \pm\frac{5}{2}i}$$ الجذران مترافقان

7. $z^2 - 2zi + 3 = 0$

Sol :

$$z^2 - 2zi + 3 = 0 \ \rightarrow z^2 - 2zi - 3i^2 = 0$$

$$(z - 3i)(z + i) = 0 \ \rightarrow \text{either } \boxed{z = 3i} \quad \text{OR} \quad \boxed{z = -i}$$

مجموعة حل المعادلة :- $\{3i\ , -i\}$ الجذران غير مترافقان

ملاحظة : المعادلة التربيعية التي معاملاتها اعداد حقيقية تكون جذراها مترافقان

ملاحظـــة

ايجاد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها

اذا كانت صيغة السؤال جد المعادلة التربيعية التي جذراها كذا (الجذران معلومان) نتبع ما يلي :

1. اول شيء نفكر به هو يجب ان يكون الجذران بالصيغة العادية للعدد المركب $(a+bi)$ (فاذا كان الجذران قوس مرفوع لاس معين فيجب ان نفتح الاقواس واذا كان العدد المركب كسر $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$ فنضرب بالعامل المرافق)
2. نجد حاصل جمع الجذرين .
3. نجد حاصل ضرب الجذرين
4. نكتب المعادلة القياسية :

$$x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$$

سؤال / جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm(2+2i)$ ؟

Sol :

مجموع الجذرين : $(2+2i)+(-2-2i)=0$

حاصل ضرب الجذرين : $(2+2i)(-2-2i)=-4-4i-4i-4i^2$

$=-4-8i+4=-8i$

∴ المعادلة التربيعية هي $x^2-0x+(-8i)=0 \Rightarrow x^2-8i=0$

سؤال / كون المعادلة التربيعية التي جذراها m , L حيث :

1. $m=1+2i \quad , L=1-i$

Sol :

مجموع الجذرين : $M+L=(1+2i)+(1-i)=\boxed{2+i}$

حاصل ضرب الجذرين : $M.L=(1+2i)(1-i)=1-i+2i-2i^2$

$=1+i+2=\boxed{3+i}$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2-(2+i)x+(3+i)=0$

2. $m=\frac{3-i}{1+i} \quad , L=(3-2i)^2$

(يجب ان نحول بالصيغة العادية للعدد المركب ومن ثم نكمل الحل)

Sol :

$$m=\frac{3-i}{1+i}=\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{3-3i-i+i^2}{1+1}=\frac{2-4i}{2}=\frac{2}{2}-\frac{4}{2}i=1-2i$$

$L=(3-2i)^2=9-12i+4i^2=9-12i-4=5-12i$

مجموع الجذرين $M+L=(1-2i)+(5-12i)=6-14i$

حاصل ضرب الجذرين $M.L=(1-2i)(5-12i)=5-12i-10i+24i^2$

$=5-22i-24=-19-22i$

$$x^2-(6-14i)x+(-19-22i)=0$$

ملاحظـــة

اذا كانت المعادلة التربيعية ذات معاملات حقيقية فأن الجذران مترافقان والعكس صحيح.

سـؤال / كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية واحد جذريها $3-4i$.

الحـل /

بما ان معاملات المعادلة حقيقية احد جذريها $3-4i$ ، اذن الجذر الاخر هو المرافق له $3+4i$

مجموع الجذرين هو : $(3-i)+(3+i)=6$

حاصل ضرب الجذرين هو : $(3-i)(3+i)=(3)^2+(1)^2=9+1=10$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2-6x+10=0$

سـؤال / ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها i ؟

الحـل /

بما ان معاملات المعادلة حقيقية واحد جذريها i فان الجذر الاخر هو المرافق له وهو $-i$

مجموع الجذرين هو : $i+(-i)=i-i=0$ ،

حاصل ضرب الجذرين هو : $i.(-i)=-i^2=1$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2-(0)x+1=0 \Rightarrow x^2+1=0$

سـؤال / ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها $5-i$.

الحـل /

بما ان معاملات المعادلة حقيقية واحد جذريها $5-i$

∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $5+i$

مجموع الجذرين هو : $(5-i)+5+i)=10$

حاصل ضرب الجذرين هو : $(5-i)(5+i)=25+1=26$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2-10x+26=0$

سـؤال / ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها $\frac{\sqrt{2}+3i}{4}$.

Sol :

$$\frac{\sqrt{2}+3i}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i$$

بما ان معاملات المعادلة حقيقية واحد جذريها $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i$ ،

∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i$

مجموع الجذرين هو : $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i\right)=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\ \sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

حاصل ضرب الجذرين هو : $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i\right)=\frac{2}{16}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{11}{16}=0$

سـؤال / كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية اذا كان احد جذريها $(\sqrt{3}-i)^2$

Sol :

$$(\sqrt{3}-i)^2=3-2\sqrt{3}i+i^2=3-2\sqrt{3}i-1=2-2\sqrt{3}i$$

بما ان معاملات المعادلة حقيقية واحد جذريها $2-2\sqrt{3}i$ ،

∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $2-2\sqrt{3}i$

المعادلة التربيعية $x^2-4x+12=0 \Rightarrow$ اكمل الحل . ...

ملاحظــــة

اذا كـانت المعادلة التربيعية معلومة في الســـؤال والمطلوب ايجاد الثوابت او الجذر الاخر فهنا يجب ان نجعل المعادلة المعطاة في الســـؤال مشـــابهة للمعادلة القياســـية ومن ثم نقارن المعادلة التربيعية المعطاة بالمعادلة القياسية وكما يلي :

1. نجعل معامل x^2 يساوي واحد (بقسمة المعادلة على معامل x^2).
2. اذا وجد اكثر من حد ل (x او x^2) نستخرج (x او x^2) عامل مشترك
3. من المقارنة نحدد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين
4. يجب الانتباه الى الاشارات عند المقارنة

ملاحظــــة

في هذا النوع من الاسئلة توجد اربع مصطلحات وهي:

(1- جذري المعادلة 2- مجموع الجذرين 3- حاصل ضرب الجذرين 4- الثوابت) في حالة الجمع معلوم نجد الجذر الثاني ومن ثم نجد الضرب ، وفي حالة الضرب معلوم نجد الجذر الثاني ومن ثم نجد الجمع ، وفي حالة الجذران معلومان نجد الجمع والضرب ، ومن كل الحالات نجد قيم الثوابت.

سـؤال / اذا كان $3 + i$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$ فما قيمة $a \in \mathbb{C}$ ؟ وما هو الجذر الاخر ؟

Sol :

$x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

نستنتج ان حاصل ضرب الجذرين $= 5 + 5i$ ، ومجموع الجذرين $= a$

احد الجذرين $= 3 + i$ ، نفرض الجذر الاخر هو L

$\therefore\ L(3 + i) = 5 + 5i$ حاصل ضرب الجذرين

$$L = \frac{5+5i}{3+i} = \frac{5+5i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{15 - 5i + 15i - 5i^2}{9+1} = \frac{20+10i}{10} = \frac{20}{10} + \frac{10}{10}i$$

$= 2 + i$ (الجذر الاخر)

$a = (3 + i) + (2 + i) \Rightarrow a = 5 + 2i$

ملاحظــة

- ✓ أي جذر من جذور المعادلة يحقق تلك المعادلة في الســؤال اعلاه أي نعوض الجذر بالمعادلة بدلا عن x لاستخراج قيمة a ومن ثم نجد الجذر الاخر .
- ✓ اذا كانت معاملات المعادلة التربيعية اعداد حقيقية فهذا يعني بأن مجموع الجذرين = عدد حقيقي وحاصل ضرب الجذرين = عدد حقيقي ايضا ، وهذا لا يحدث الا اذا كان الجذران مترافقان كما في السؤال ادناه.

سـؤال / اذا كان $2 - 4i$ هو احد جذري المعادلة $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$ معاملاتها حقيقية ، جد قيمتي $b , c \in R$.

الحـل /

بما ان المعاملات حقيقية واحد الجذرين $2 - 4i$

اذن الجذر الاخر هو المرافق له $(2 + 4i)$

نجعل المعادلة المعطاة مشابهة للمعادلة القياسية

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 - (1 + b)x + (c - 6) = 0\ ]\ \div 2$

$x^2 - \left(\frac{1+b}{2}\right)x + \left(\frac{c-6}{2}\right) = 0$ تصبح المعادلة كالاتي

بالمقارنة مع المعادلة القياسية نجد ان مجموع الجذرين $= \frac{1+b}{2}$ ،

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{c-6}{2}$

$$(2-4i)+(2+4i)=\frac{1+b}{2} \Rightarrow 4=\frac{1+b}{2} \Rightarrow 1+b=8 \Rightarrow b=7$$

$$(2-4i)(2+4i)=\frac{c-6}{2} \Rightarrow 4+16=\frac{c-6}{2} \Rightarrow 20=\frac{c-6}{2}$$

$$\Rightarrow c-6=40 \Rightarrow c=46$$

سـؤال / اثبت ان $\left[\frac{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^4}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^2}\right](\cos\theta-i\sin\theta)^2=1$ ؟

(2017 د1 تطبيقي)

Sol:

$$\left[\frac{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^4}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^2}\right](\cos\theta-i\sin\theta)^2$$

$$=\left[\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{12}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}\right](\cos\theta+i\sin\theta)^{-2}$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^2(\cos\theta+i\sin\theta)^{-2}=(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$$

سـؤال / باستخدام مبرهنة ديموافر بسط ما يأتي $\left[\frac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^{-5}}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^2}\right]+1$ ؟

(2017 د2 احيائي موصل)

Sol:

$$\left[\frac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^{-5}}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^2}\right]+1=\left[\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^{5}}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^2}\right]+1=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}+1=1+1=2$$

1. $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

Sol:

$$z=\sqrt{3}+i\ ,\mathrm{mod}\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}$$

$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\emptyset=\frac{x}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ,\sin\emptyset=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{2}$$

$\arg(z)=\emptyset=\frac{\pi}{6}$ لانها تقع في الربع الاول

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z^{-9}=\left[2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\right]^{-9}=(2)^{-9}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{-9}$$
$$=\frac{1}{(2)^9}(\cos\frac{9\pi}{6}-i\sin\frac{9\pi}{6})$$
$$=\frac{1}{512}(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2})=\frac{1}{512}(0+i)=\frac{1}{512}i$$

ملاحظـــة

ممكن ان تكون صيغة السؤال اعلاه كالاتي $(\sqrt{3}+i)^9$ او $\frac{1}{(\sqrt{3}+i)^9}$

2. $(1-i)^7$

Sol :

$$\text{let } z=1-i$$
$$\text{mod } z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$
$$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad,\quad \sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$\theta=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$ زاوية الاسناد $\frac{\pi}{4}$ والسعة تقع في الربع الرابع

$$,\quad z=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$$
$$z^7=\left[\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})\right]^7=(\sqrt{2})^7(\cos\frac{49\pi}{4}+i\sin\frac{49\pi}{4})$$
$$=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\boxed{8+8i}$$

ممكن ان تكون صيغة السؤال اعلاه كالاتي $(1-i)^{-7}$ او $\frac{1}{(1-i)^7}$

سـؤال / باستخدام مبرهنة ديموافر جد $\frac{1}{(1-\sqrt{3}i)^4}$ (2018 د1 تطبيقي)

ج) $-\frac{1}{32}-\frac{\sqrt{3}}{32}i$

سـؤال / باستخدام مبرهنة ديموافر احسب $(-1-\sqrt{-1})^{-3}$ (2018 د1 احيائي خارج)

sol : $z=-1-\sqrt{-1} \Rightarrow z=-1-i$ اكمل ... $\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

حل المعادلة باستخدام مبرهنة ديموافر $x^3+i=0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

(2017 د2 تطبيقي خارج)

سـؤال / بأستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $27i$.

جد الجذور التكعيبية تعني $(\ )^{\frac{1}{3}}$

جد الجذور الاربعة تعني $(\ )^{\frac{1}{4}}$

$$z=27i \Rightarrow z=27\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z^{\frac{1}{3}}=\left[27\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \quad , \quad \therefore r=27 \ ,\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$z^{\frac{1}{3}}=(27)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$$

حيث $k=0,1,2$ لانه جذر تكعيبي

عندما $k=0 \Leftarrow$

$$z_1=3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}$$

عندما $k=1 \Leftarrow$

$$z_2=3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=3\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}$$

عندما $k=2 \Leftarrow$

$$z_3=3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)$$

$$=3\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right)=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=3(0-i)=\boxed{-3i}$$

الجذور التكعيبية هي : $\left\{-3i \;, \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i \;, -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$

جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$ بأســتخدام مبرهنة ديموافر ثم الطريقة المعروضــة في البند [1_4] . (2014 خارج ، 2017 د3 احيائي)

Sol :

الطريقة الأولى :

$$z=-1+\sqrt{3}i$$

$$\text{mod } z=\|z\|=r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-1}{2} \;,\quad \sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$ والسعة تقع في الربع الثاني $,\theta$

$$=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\rightarrow z^{\frac{1}{2}}=\left[2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}\right) \;;\quad k=0\,,1$$

عندما $k=0 \Leftarrow$

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i}$$

عندما $k=1 \Leftarrow$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i}$$

$$-1+\sqrt{3}i=(x+yi)^2 \;\Leftarrow -1$$

اوجد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له .

(2014 د2)

Sol :

$$z=\sqrt{3}+i \;,\text{mod } z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\emptyset=\frac{x}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad,\sin\emptyset=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{2}$$

$\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{6}$ لانها تقع في الربع الاول

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) \Rightarrow z^2 = \left[2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})\right]^2 = 2^2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^2$$

$$z^2 = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$\therefore (z^2)^{\frac{1}{5}} = \left[4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\right]^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{\frac{1}{5}}$$

$$(z^2)^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}\right)$$ k لانه جذر خامس

$= 0, 1, 2, 3, 4$ حيث

$z_1 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right) \Leftarrow k = 0$ عندما

$z_2 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right) \Leftarrow k = 1$ عندما

$z_3 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right) \Leftarrow k = 2$ عندما

$z_4 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 6\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 6\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right) \Leftarrow k = 3$ عندما

$z_5 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 8\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 8\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right) \Leftarrow k = 4$ عندما

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

ملاحظـــة

ممكن ان تكون صيغة السؤال اعلاه : $(\sqrt{3} + i)^{\frac{2}{5}}$ او $\sqrt[5]{(\sqrt{2} + i)^2}$ (البسط اس والمقام دليل الجذر)

سـؤال / احسب باستخدام ديموافر $(\sqrt{3} + i)^{\frac{-3}{2}}$ **(2017 د1 احيائي)**

$$(\sqrt{3} + i)^{\frac{-3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3} + i)^3}}$$

السـالب ينزل العدد للمقام والبسـط اس والمقام دليل الجذر

$$z = \sqrt{3} + i \quad \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$ $,\theta = \frac{\pi}{6}$ لانها تقع بالربع الاول

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$z^{-3} = \left[2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})\right]^{-3} \Rightarrow z^{-3} = 2^{-3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^{-3}$$

$$\boxed{(\frac{1}{8})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

$$z^{-3} = \frac{1}{8}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$(z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{8}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} - i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2})$$

$k = 0, 1$ حيث

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Leftarrow k = 0 \text{ عندما}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

$$z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{2}}{2} - i\sin\frac{\frac{5\pi}{2}}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \Leftarrow k = 1 \text{ عندما}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

ملاحظـــة

ممكن ان تكون صيغة السؤال : جد باستخدام ديموافر الجذور التربيعية للعدد المركب $\frac{1}{(\sqrt{3}+i)^3}$

الفصل الثاني

س1/ جد معادلة القطع المكافيء بالتعريف الذي معادلة دليله $y = \sqrt{3}$ والرأس في نقطة الاصل .

س2/ جد معادلة القطع المكافئ بطريقة التعريف اذا كانت بؤرته هي نقطة انقلاب الدالة $f(x) = x^3 + 6x^2 - 16$ ، ورأسه نقطة الأصل

س3/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 8X = 0$ علما بأن القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}\,, \sqrt{3})$

Sol :

$y^2 + 8x = 0 \Rightarrow y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\Leftarrow$ في القطع المكافئ

$4p = 8 \Rightarrow p = 2$

$F(-2, 0)$ بؤرة القطع المكافئ و هي احدى بؤرتي القطع الناقص

$c = 2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ المعادلة القياسية للقطع الناقص هي $\Leftarrow$ في القطع الناقص

$\frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \;] * a^2b^2$ $\Longleftarrow$ في المعادلة القياسية $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ نعوض النقطة

$12b^2 + 3a^2 = a^2b^2 \quad \dots\dots(1$

$a^2 = b^2 + c^2 \;\Rightarrow\; a^2 = b^2 + 4 \quad \dots\dots(2$

$12b^2 + 3(b^2 + 4) = (b^2 + 4)b^2$ $\Leftarrow$ (1) في معادلة (2) نعوض معادلة

$12b^2 + 3b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$

$b^4 + 4b^2 - 12b^2 - 3b^2 - 12 = 0 \;\Rightarrow b^4 + 11b^2 - 12 = 0$

$(b^2 + 1)(b^2 - 12) = 0 \qquad ,(b^2 + 1) = 0$ يهمل

$(b^2 - 12) = 0 \;\Rightarrow\; b^2 = 12$ نعوضها في معادلة (1)

$a^2 = b^2 + 4 \;\Rightarrow\; a^2 = 12 + 4 \Rightarrow a^2 = 16$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الناقص

ملاحظة//

القطع الناقص (يقطع ، يمر ، يمس) بنقطة احد احداثيها يساوي صفر فان النقطة اما رأس او قطب

(فاذا كانت النقطة تطابق البؤرة تمثل الرأس a اما اذا كانت تخالف البؤرة فانها تمثل القطب b) . جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 = 12x$

الحـل /

في المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ عندما $x = 0$ فان

$y^2 = 16 \;\Rightarrow y = \pm 4 \quad , \quad (0\,,4),(0\,,-4)$ بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow \;\; c = 4$

$y^2 = 12x \quad ,y^2 = 4px$ المعادلة القياسية

$4p = 12 \Rightarrow p = 3$ في القطع المكافئ

$x = -3$ معادلة الدليل $\Rightarrow$ $(-3\,,0)$ نقطة التماس $\in$ للقطع الناقص

$b = 3$ لان البؤرتين تقعان على محور الصادات والنقطة تقع على محور السينات

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة القطع الناقص

سـؤال / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بنقطتي تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع المحورين الاحداثيين .

Sol :

نقطة التقاطع مع محور الصادات $if\ x = 0 \Rightarrow -y = 8 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow (0, -8)$

نقطة التقاطع مع محور السينات $if\ y = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 0)$

$\therefore (0, -8), (4, 0) \in$ للقطع الناقص

$\Rightarrow a = 8, b = 4$ والبؤرتان تقعان على محور الصادات

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$ معادلة القطع الناقص

سـؤال / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ ، وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

Sol :

$y^2 - 12x = 0 \Rightarrow y^2 = 12x$

$y^2 = 4px$ المعادلة القياسية $\Leftarrow$ في القطع المكافئ

$4p = 12 \Rightarrow p = 3$

$F(3, 0)$ بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

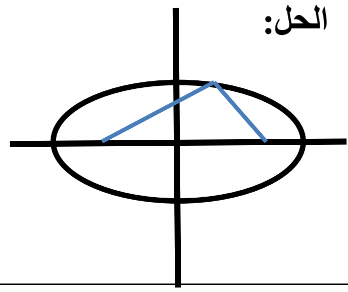
$c = 3 \quad , \quad 2b = 10 \Rightarrow b = 5$ $\Leftarrow$ في القطع الناقص

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة القطع الناقص

سـؤال / جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4, 0), F_2(-4, 0)$ والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث ان محيط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة . **(2014 د1)**

الحل:



$c = 4$

$QF_1 + QF_2 + F_1F_2 = 24$

$2a + 2c = 24 \Rightarrow 2a + 8 = 24 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 64 - 16 \Rightarrow b^2 = 48$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ معادلة القطع الناقص

ســــــؤال / جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ومركزه في نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2 + 8X = 0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2) .

الحـل /

في القطع المكافئ $y^2 + 8X = 0$ عند $x = -2$ فان

$y^2 - 16 = 0 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$, $(-2, 4), (-2, -4) \in$ للقطع الناقص

$2a = 2(2b) \Rightarrow 2a = 4b \Rightarrow a = 2b$ في القطع الناقص

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

نعوض احدى النقطتين في المعادلة القياسية ولتكن $(-2, 4)$ وعن $a = 2b \Leftarrow$

$\frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{17}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17} \Rightarrow a = 2b \Rightarrow a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$ معادلة القطع الناقص

ســــــــؤال / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصــل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة . (2012 تمهيدي)

Sol :

$x^2 = 24y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية ← في القطع المكافئ

$4p = 24 \rightarrow p = 6$, $(0, 6)$ بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

$(0, 6), (0, -6)$ بؤرتي القطع الناقص , $c = 6$ ← في القطع الناقص

$2a + 2b = 36] \div 2 \rightarrow a + b = 18 \rightarrow$

$a = 18 - b \; \ldots\ldots (1 \quad , a^2 = b^2 + c^2 \; \ldots\ldots (2$

$(18 - b)^2 = b^2 + 36$ **نعوض معادلة (1) في معادلة (2)**

$324 - 36b + b^2 = b^2 + 36 \rightarrow 36b = 324 - 36$

$36b = 288 \rightarrow b = 8$, $a = 18 - b \rightarrow a = 18 - 8 \rightarrow a = 10$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$$ معادلة القطع الناقص

ســــــؤال / قطع ناقص معادلته $hx^2+ky^2=36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يســـاوي (60) ، واحدى بؤرتيـه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلتـه $y^2=4\sqrt{3}x$ مـا قيمـة كل من $h,k \in R$ ؟ (1998 د2)

Sol :

المعادلة القياسية $y^2=4\sqrt{3}x \quad ,y^2=4px$

في القطع المكافئ $4p=4\sqrt{3} \Rightarrow p=\sqrt{3}$

بؤرة القطع المكافئ و هي احدى بؤرتي القطع الناقص $(\sqrt{3},0)$

بؤرتي القطع الناقص $(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0) \quad \Rightarrow \quad c=\sqrt{3}$

$$(2a)^2+(2b)^2=60 \Rightarrow [4a^2+4b^2=60] \div 4$$

$$a^2+b^2=15 \Rightarrow a^2=15-b^2 \quad \dots\dots(1$$

$$a^2=b^2+c^2 \dots\dots(2$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$$15-b^2=b^2+3 \Rightarrow 2b^2=12 \Rightarrow b^2=6$$

$$a^2=15-6 \Rightarrow a^2=9$$

$$[hx^2+ky^2=36] \div 36 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{h}}+\frac{y^2}{\frac{36}{k}}=1$$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$a^2=\frac{36}{h} \Rightarrow 9=\frac{36}{h} \Rightarrow h=\frac{36}{9} \Rightarrow h=4$$

$$b^2=\frac{36}{k} \Rightarrow 6=\frac{36}{k} \Rightarrow k=\frac{36}{6} \Rightarrow k=6$$

تحويل الكلام الى صيغ رياضية

1- مجموع طولي محوريه $2a+2b$

2- مجموع مربعي طولي محورية $(2a)^2+(2b)^2$

3- مجموع طول محوره الالكبير ونصف طول محوره الصغير $2a+\frac{1}{2}(2b)$

4- الفرق بين طولي محوريه $2a-2b$

5- طول محوره الكبير يزيد على طول محوره الصغير بمقدار 4 . $2a-2b=4$

6- طول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير $2a=2(2b)$

7- طول محوره الكبير ثلاثة امثال طول محوره الصغير $2a = 3(2b)$

8- البعد البؤري مساويا لبعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله $2c = 2p$

9- النسبة بين طولي محوريه $\frac{2a}{2b} = \frac{\text{اكبر}}{\text{اصغر}}$, $\frac{2b}{2a} = \frac{\text{اصغر}}{\text{اكبر}}$

10- النسبة بين طول محوره الكبير الى البعد بين بؤرتين $\frac{2a}{2c}$

11- النسبة بين البعد بين البؤرتين الى طور محوره الصغير $\frac{2c}{2b}$

12- جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ

$p_{\text{مكافئ}} = c_{\text{ناقص}}$

سـؤال / جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10π وحدة .

(تمارين عامة) (2011 د2)

Sol :

$$A = ab\pi \Rightarrow 7\pi = ab\pi \Rightarrow a = \frac{7}{b} \quad \dots\dots\dots (1$$

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow 10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow 5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$ بتربيع الطرفين

$$25 = \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow 50 = a^2 + b^2 \quad \dots\dots (2$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$$50 = \left(\frac{7}{b}\right)^2 + b^2 \Rightarrow 50 = \frac{49}{b^2} + b^2$$

$$50 = \frac{49}{b^2} + b^2\ ] * b^2 \Rightarrow 50b^2 = 49 + b^4 \Rightarrow b^4 - 50b^2 + 49 = 0$$

$$(b^2-1)(b^2-49) = 0$$

$$either\ \ b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \quad , a = \frac{7}{1} \Rightarrow a = 7$$

$$OR \quad b^2 = 49 \Rightarrow b = 7 \quad , a = \frac{7}{7} \Rightarrow a = 1 \qquad b > a$$ يهمل لان

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \rightarrow\ \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$$ معادلة القطع الناقص

ملاحظــة

اذا تساوى بسطي كسرين اعتياديين فأن اكبرهما هو الاصغر مقاما.

سـؤال / قطع ناقص معادلته $4x^2 + 2y^2 = k$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمة k .

(2008 د1)

Sol :

$$2c = 2\sqrt{3} \rightarrow c = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 3$$

$$[4x^2 + 2y^2 = k] \div k \rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k}{2}} = 1$$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$a^2 = \frac{k}{2} \ , b^2 = \frac{k}{4}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \left[\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + 3\right] \times 4 \rightarrow 2k = k + 12 \rightarrow k = 12$$

سـؤال / اذا كانت $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه $(0 , d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|e + id\|$.

(2014 د4 انبار)

Sol :

$$e + id = \frac{4+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{4+4i+2i+2i^2}{1+1} = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i$$

$e + id = 1 + 3i \ , \quad e = 1 \ , \quad d = 3$ تساوي عددين مركبين

$(0 , d) = (0 , 3)$ احدى بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$$2\|e + di\| = 2\|1 + 3i\| = 2\sqrt{(1)^2 + (3)^2} = 2\sqrt{1 + 9} = 2\sqrt{10} = 2a$$

$$2a = 2\sqrt{10} \rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 = 10$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 10 = b^2 + 9 \rightarrow b^2 = 1$$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{10} = 1$ معادلة القطع الناقص

سـؤال / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره على المحورين الاحداثيين ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2 - 16x = 0$ ومساحة منطقة القطع الناقص تساوي 20π وحدة مساحة ؟

(2010 د1)

Sol :

$\mathbf{y^2 - 16x = 0 \rightarrow y^2 = 16x}$, $\mathbf{y^2 = 4px}$ بالمقارنة مع القياسية القطع المكافئ

$\mathbf{4p = 16}$

$\mathbf{p = 4 \rightarrow (4\,,0)}$ بؤرة القطع المكافئ ← في القطع المكافئ

$\mathbf{(4\,,0)} \in$ للقطع الناقص ,

$\mathbf{either\ \ a = 4 \quad OR \quad b = 4}$ ← في القطع الناقص

$A = ab\pi \Rightarrow \mathbf{ab\pi = 20\pi \rightarrow ab = 20}$

$\mathbf{if\ \ a = 4 \rightarrow 4b = 20 \rightarrow b = 5}$ في القطع الناقص $(\mathbf{b})$ دائما اكبر من $(\mathbf{a})$ تهمل لان

$\mathbf{if\ \ b = 4 \rightarrow 4a = 20 \rightarrow\rightarrow a = 5}$

بما ان القطب يقع على محور السينات فأن البؤرتين والرأسين يقعان على محور الصادات .

$$\mathbf{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1}$$ معادلة القطع الناقص

ســـــؤال / جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه نقطة انقلاب الدالة $f(x) = (x+2)(x-1)^2$ **وطول محوره الكبير يساوي 12 وحدتا طول ؟**

(2017 د3 احيائي داخل)

Sol :

$$f(x) = (x+2)(x-1)^2 = (x+2)(x^2 - 2x + 1)$$

$\acute{f}(x) = (x+2)(2x-2) + (x^2 - 2x + 1)(1)$

$\acute{f}(x) = 2x^2 - 2x + 4x - 4 + x^2 - 2x + 1 = 3x^2 - 3$

$\bar{\bar{f}}(x) = 6x \ ,\bar{\bar{f}}(x) = 0 \ \ ,6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 2 \quad \Rightarrow (0\,,2)$ نقطة انقلاب مرشحة

----------- 0 ++++++++ $\bar{\bar{f}}(x)$ اشارة

$\{x : x > 0\}$ الدالة مقعرة عند , $\{x : x < 0\}$ الدالة محدبة عند

$(0\,,2)$ **نقطة انقلاب وهي احدى بؤرتي القطع الناقص**

$c = 2 \quad ,2a = 12 \Rightarrow a = 6 \quad \Leftarrow$ في القطع الناقص

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 32$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$$ معادلة القطع الناقص

سـؤال / قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصـل ويمر بالنقطتين $(1\,,2\sqrt{5})$, $(1\,,-2\sqrt{5})$ ، جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسـه نقطة الاصـل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ؟

الحـل /

القطع المكافئ يمر بنقطتان متناظرتان حول المحور السيني الموجب ، لذا فان بؤرته تقع على المحور السيني الموجب و المعادلة القياسية هي $y^2 = 4px$

نعوض احدى النقطتين في المعادلة القياسية ولتكن النقطة $(1\,,2\sqrt{5})$

$$(2\sqrt{5})^2 = 4p(1) \Rightarrow 20 = 4p \Rightarrow p = 5$$

$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 20x$ معادلة القطع المكافئ

بؤرة القطع المكافئ و هي احدي بؤرتي القطع الزائد $(5\,,0)$

$(5\,,0)\,,(-5\,,0)$ بؤرتي القطع الزائد $\Rightarrow c = 5 \;\;, 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسـبة بين طولي محوريه $= \frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل .

Sol :

$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \to \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \;\;\leftarrow$ في القطع الزائد

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\to a^2 = 12 \;\;, b^2 = 4$

$$c^2 = a^2 + b^2 \to c^2 = 12 + 4 = 16 \to c = 4$$

$(4\,,0), (-4\,,0)$ بؤرتي القطع الزائد و هما بؤرتي القطع الناقص

$$c = 4 \qquad , \quad \frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \to 3a = 5b \to$$

$a = \frac{5b}{3} \;\ldots\ldots(1 \;\;\Leftarrow$ في القطع الناقص

$$a^2 = b^2 + c^2 \;\ldots\ldots(2$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$$\left[\frac{25b^2}{9} = b^2 + 16\right] * 9 \to 25b^2 = 9b^2 + 144$$

$$16b^2 = 144 \to b^2 = 9 \to b = 3 \qquad , a = \frac{5b}{3} = \frac{5(3)}{3} = 5 \to a^2 = 25$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الناقص

سـؤال / جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$.

Sol :

في القطع الناقص $\Leftarrow$ $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1 \;,\; a^2=49 \;,\; b^2=24$

$a^2=b^2+c^2 \rightarrow 49=24+c^2 \rightarrow c^2=25 \rightarrow c=5$

بؤرتي القطع الناقص والتي تنتمي الى القطع الزائد $(\pm 5\,,0)$

$a=5$ $\leftarrow$ في القطع الزائد

$\frac{2c}{2b}=\frac{5}{4} \rightarrow 4c=5b \rightarrow c=\frac{5b}{4} \;\dots\dots(1 \quad , \quad c^2=a^2+b^2 \;\dots\dots..(2$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$\left[\frac{25b^2}{16}=25+b^2\right]\times 16 \rightarrow 25b^2=400+16b^2$

$9b^2=400 \rightarrow b^2=\frac{400}{9}$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{400}{9}}=1$ معادلة القطع الزائد

ملاحظــة

اذا مس القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل دليلا قطعا مكافئا فان نقطة التماس حتما تمثل الرأس (a).

سـؤال / جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلته $x^2+12y=0$.

Sol :

في القطع الناقص $\Leftarrow$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1 \quad , \quad a^2=25 \;, b^2=9$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

بؤرتاه القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(0,4),(0,-4)$

في القطع المكافئ ⇐ $x^2 + 12y = 0 \Rightarrow x^2 = -12y$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $x^2 = -4py$

$4p = 12 \Rightarrow p = 3$

للقطع الزائد $\in$ نقطة تماس $(0,3)$ $\Rightarrow$ معادلة الدليل $y = 3$

في القطع الزائد ⇐ $a = 3 \quad , c = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 7$

معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

ملاحظـــة

اذا مس مستقيم قطع ناقص فان نقطة التماس تمثل رأس او قطب القطع الناقص ، اما اذا مس مستقيم قطع زائد فان نقطة التماس تمثل الرأس فقط.

سـؤال / جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع محور السينات وطول محوره التخيلي يساوي (4) وحدات .

الحـل /

نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات يكون فيها $y = 0$

للقطع الزائد $, c = 4$ احدى بؤرتي القطع الزائد $(4,0)$ $\quad$ $if \ y = 0 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4 ,$

$2b = 4 \rightarrow b = 2 \ , c^2 = a^2 + b^2$

$16 = a^2 + 4 \Rightarrow a^2 = 16 - 4 \rightarrow a^2 = 12$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

سـؤال / النقطة p(6 ,L) تنتمي للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد كلا من :

1. قيمة L .
2. طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P .

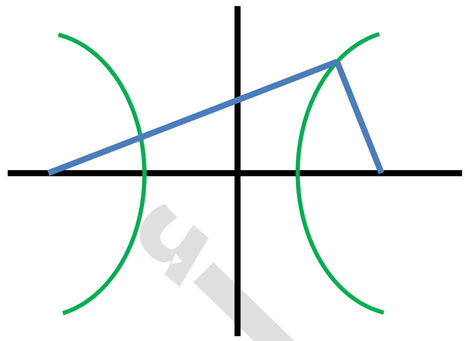
Sol :

اي نقطة تنتمي للقطع الزائد فانها تحقق معادلته

نعوض النقطة $(6, L)$ في معادلة القطع الزائد المعطاة في السؤال ⇐ $36 - 3L^2 = 12$

$3L^2 = 36 - 12 \Rightarrow 3L^2 = 24 \Rightarrow L^2 = 8 \Rightarrow L = \pm\sqrt{8}$

$P_1(6,\sqrt{8}), P_2(6,-\sqrt{8}) \in$ للقطع الزائد



$x^2 - 3y^2 = 12\,] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 12 \;, b^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

$F_1(4,0)$ البؤرة اليمنى للقطع الزائد

P_1F_1 هو طول النصف القطر البؤري من الجهة اليمنى

$P_1F_1 = \sqrt{(6-4)^2 + (\sqrt{8}-0)^2} = \sqrt{(2)^2 + (\sqrt{8})^2}$

$= \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ وحدة طول

سـؤال / عين النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ والتي تبعد عن البؤرة في الفرع الايمن بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة

سـؤال / جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x \;,\; y^2 = -20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي 2 وحدة .

Sol :

$y^2 = 20x \;, y^2 = 4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\Rightarrow 4p = 20 \rightarrow p = 5$

$y^2 = -20x \;, y^2 = -4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\Rightarrow 4p = 20 \rightarrow p = 5$

بؤرتي القطعين المكافئين و هما بؤرتي القطع الزائد $(\pm 5, 0)$

$2a - 2b = 2] \div 2 \rightarrow a - b = 1 \rightarrow a = b + 1 \;\ldots\ldots\ldots (1$ $\leftarrow$ في القطع الزائد

$c^2 = a^2 + b^2 \;\ldots\ldots\ldots (2 \quad , \quad c = 5$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$25 = (b+1)^2 + b^2 \rightarrow 25 = b^2 + 2b + 1 + b^2$

$2b^2 + 2b - 24 = 0] \div 2 \rightarrow b^2 + b - 12 = 0 \rightarrow (b+4)(b-3) = 0$

$(b+4) = 0$ يهمل

$b = 3 \;, a = 3 + 1 = 4 \;,\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

سـؤال / جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2 - 16x^2 = 144$ ويقطع من محور السينات جزءا طوله 12 وحدة .

Sol :

$[9x^2 - 16y^2 = 144] \div 144 \rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ← في القطع الزائد

$a^2 = 16 \ , b^2 = 9 \ , \quad c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 16 + 9 \rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = 5$

بؤرتي القطع الزائد $(0 , 5) , (0 , -5)$

في القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل $a = 5 \quad OR \quad b = 5$

بما ان الجزء المقطوع من محور السينات = 12 فأن

$2a = 12 \rightarrow a = 6 \quad OR \quad 2b = 12 \rightarrow b = 6$

نقوم بأخذ احتمال واحد من كل احتمالين لينتج

$a = 6 \ , \ b = 5$

بما ان القطبين يقعان على محور الصادات فأن البؤرتين والرأسين يقعان على محور السينات

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة القطع الناقص

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه هي مركز الدائرة $x^2 + y^2 - 16y + 15 = 0$ ونصف طول محوره المرافق يساوي نصف قطر تلك الدائرة ؟

(2018 د3 احيائي داخل)

Sol :

$x^2 + y^2 - 16y + 15 = 0$

بعد المقارنة بالصورة القياسية $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$h = \frac{-a}{2} = \frac{0}{2} = 0 \ , k = \frac{-b}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{64 - 15} = \sqrt{49} = 7$

$(h , k) = (0, 8)$ مركز الدائرة $\Rightarrow (0 , \pm 8)$ بؤرتي القطع الزائد $\Rightarrow c = 8$

$\frac{1}{2}(2b) = r \Rightarrow b = 7 \ , c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 15$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{49} = 1$

ســــــــــــؤال / جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصـــل وبؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{164}+\frac{y^2}{64}=1$ ومجموع طولي محوريه الحقيقي والتخيلي يساوي 28 وحدة .

(2019 د2 احيائي)

Sol :

$a^2 = 164 \ , b^2 = 64$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 164 = 64 + c^2 \Rightarrow c^2 = 164 - 64 = 100 \quad , c = 10$

$F_1(10,0) \, , F_2(-10\,,0)$ بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد

$2a + 2b = 28] \div 2 \Rightarrow a + b = 14$

$a = 14 - b \ \ldots\ldots (1 \ , \quad c^2 = a^2 + b^2 \ \ldots\ldots (2$

$100 = (14-b)^2 + b^2 \Rightarrow 100 = 196 - 28b + b^2 + b^2$

$2b^2 - 28b + 96 = 0] \div 2 \Rightarrow b^2 - 14b + 48 = 0$

$(b-8)(b-6) = 0 \ \Rightarrow either \ b = 8 \, , a = 6 \quad OR \ b = 6 \ , a = 8$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1 \quad , \quad \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ معادلات القطع الزائد

ســؤال / اذا كانت $\frac{11+2i}{1+2i} = d + ie$ جد معادلة القطع الناقص الذي رأسه نقطة الاصل و احدى بؤرتيه $(0\,,e)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|d+ie\|$

ســؤال / قطعان زائد وناقص احدهما يمر ببؤرتي الاخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ علما ان محوريهما على المحورين الاحداثيين

ســؤال / جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 16x = 0$ ومجموع بعدي اي نقطة من نقاطه عن البؤرتين يساوي 24 وحدة.

ســؤال / جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $36x^2 + 11y^2 = 396$ واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرته على محور الصادات ويمر دليله بالنقطة $(4\,,7)$

ســؤال / جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 24x = 0$ ودليله ، كما ان بؤرتيه تمر برأسي القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

سـؤال / النقطة $p(h, 2\sqrt{2})$ تنتمي للقطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 2h$ ومركزه نقطة الاصل جد قيمة h الحقيقية الموجبة ، ثم جد طول نصف القطر البؤري الاول والثاني المرسومين من نقطة p ؟

سـؤال / جدارية على شكل قطع ناقص طول قاعدته 24 m واعلى نقطة ارتفاع لها تساوي 9m ، جد ارتفاع العمود الموضوع على بعد 6m من بداية قاعدته

سـؤال / يدور القمر حول الارض في مدار على صورة قطع ناقص سيني البؤرتين . تقع الارض في احدى بؤرتيه فاذا كانت اطول مسافة بين الارض والقمر 90 KM واقصر مسافة بينهما $10\ km$ جد الاختلاف المركزي للقطع؟

Sol :

$$2a = 90 + 10 \Rightarrow 2a = 100 \Rightarrow a = 50$$
$$2c = 90 - 10 \Rightarrow 2c = 80 \Rightarrow c = 40$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

سـؤال / متوازي سطوح مستطيلة ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل ، يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل 0.3 cm/s ، وارتفاعه يتناقص بمعدل 0.5 cm/s ، جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة 4cm والارتفاع 3 cm؟

سـؤال / كرة صلدة نصف قطرها 4 cm مغطاة بطبقة من الجليد بحيث يبقى شكلها كرويا ، فاذا كان الجليد يذوب بمعدل $10\ cm^3/s$. جد سرعة نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد 1 cm ؟

سـؤال / سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل 2 m/s ، فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$ ؟

سـؤال / لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ ، جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0, \frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة m ؟

سـؤال / بين هل ان مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية ؟ وجد قيمة C الممكنة .

$$f(x) = (2 - x)^2 \quad , \quad x \in [0, 4]$$

سـؤال/ هل الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة $g(x) = \frac{4}{x+2} \quad , \quad x \in [-1, 2]$

سـؤال / اذا كانت $f:[0,b]\to R\ , f(x)=x^3-4x^2$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ فجد قيمة b

سؤال // برهن ان الدالة الاتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة واوجد قيم c ؟

$f(x)=\sqrt{25-x^2}\ , x\in[-4,0]$

سـؤال / باستخدام التفاضلات جد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[3]{-9}$

سـؤال / اذا كانت $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$ جد بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية الى $f(1.01)$.

سـؤال / كرة حجمها $84\pi\ cm^3$ ، جد نصف قطرها بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة القيمة المتوسطة

سـؤال / مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فاذا كان ارتفاعه يساوي $2.98\ cm$ فجد حجمه بصورة تقريبية بأستخدام القيمة المتوسطة او نتيجتها .

سـؤال / مخروط دائري قائم حجمه $210\pi\ cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه $10\ cm$

سـؤال / متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة امثال طول قاعدته ، جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته $2.97\ cm$

سـؤال / مستطيل بعداه $\sqrt[3]{28}\ ,\ \sqrt{143}$ جد مساحته بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

سـؤال / يراد طلاء مكعب طول ضلعه 10 cm فاذا كان سمك الطلاء 0.15 cm اوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

امثلة وتمارين موضوع إيجاد الثوابت **10 درجات

********موضوع رسم الدوال10 درجات امثلة وتمارين********

تطبيقات على النهايات امثلة وتمارين للتطبيقي مهم جدا *10درجات **

الفصل الرابع : التكامل

س1/ جد التكاملات التالية :

1) $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\,dx$

2) $\int \sqrt[4]{1-2x}\,dx$

3) $\int \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2\,dx$

4) $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx$

5) $\int \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx$

6) $\int \frac{1}{x^2-14x+49}\,dx$

7) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

8) $\int \frac{\left(3-\sqrt{5x}\right)^7}{\sqrt{7x}}\,dx$

9) $\int \sqrt{x}\,(x+6)\,dx$

10) $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\,dx$

11) $\int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}\,dx$

12) $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\,dx$

13) $\int (\tan x+\tan^3 x)\,dx$

14) $\int \sin 6x\cos^2 3x\,dx$

15) $\int \cos 2x\,\cos 4x\,dx$

16) $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x-\sin 2x}\,dx$

17) $\int (1+\cos 3x)^2\,dx$

18) $\int (\sin 2x-1)(\cos^2 2x+2)\,dx$

19) $\int (\cos^4 x-\sin^4 x)\,dx$

20) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

21) $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

22) $\int (\sec x-\sin x)(\sec x+\sin x)\,dx$

23) $\int \cos 2x\,\sin^2 x\,dx$

24) $\int \sin^2 x\,\cos^2 x\,dx$

25) $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

26) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \sin^2 x \, dx$

27) $\int_0^2 |x-1| \, dx$

28) $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}} \, dx$

29) $\int_{-1}^1 |x+1| \, dx$

30) $\int x e^{x^2} \, dx$

31) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} \, dx$

32) $\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x \, dx$

33) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} \, dx$

34) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \, dx$

35) $\int \tan^3 2x \, dx$

36) $\int_1^3 3x \, e^{\ln x} \, dx$

37) $\int_{-2}^4 |3x-6| \, dx = 3$

سـؤال / اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ وان الدالة المقابلة للدالة f هي : $F(x) = \sin x$, $F : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ فأوجد : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx$ ؟

سـؤال / اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \forall x \geq 0 \\ 2x & , \forall x < 0 \end{cases}$ فأوجد $\int_{-1}^3 f(x) \, dx$ ؟

سـؤال / f(x) دالة مستمرة على الفترة [-2 , 6] فاذا كان $\int_1^6 f(x) \, dx = 6$ وكان $\int_{-2}^6 [f(x) + 3] \, dx = 32$ فجد $\int_{-2}^1 f(x) \, dx$ ؟

سـؤال / جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^a (x + \frac{1}{2}) \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$ ؟

سـؤال / لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$ ، دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_1^3 f(x) \, dx$ ؟

سـؤال / اذا كان للمنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ نقطة انقلاب (a , b) جد القيمة العددية للمقدار

$\int_0^b f`(x)\ dx - \int_0^a f``(x)\ dx$

سـؤال / جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2\,,2]$ ؟

سـؤال / جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات؟

سـؤال / جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ ؟

سـؤال / جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ ؟

سـؤال / جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$ ؟

سـؤال / جد المساحة المحددة بالدالتين $y = \sqrt{x-1}\ ,\ y = \frac{1}{2}x$ وعلى الفترة [2 , 5] ؟

سـؤال / جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^4 - 12\ ,\ y = x^2$

سـؤال / جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = \sin x\ ,\ g(x) = \sin x \cos x$ حيث $x \in [0\,,2\pi]$ ؟

سـؤال / جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = 2\sin x + 1\ ,\ g(x) = \sin x$ حيث $x \in \left[0\,,\frac{3\pi}{2}\right]$ ؟

سـؤال / جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4\ \ m/s$ فجد :

a. المسافة المقطوعة في الفترة $[1\,,3]$
b. الازاحة المقطوعة في الفترة $[1\,,3]$
c. المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة
d. بعده بعد مضي (4) ثواني من بدأ الحركة

سـؤال / جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t + 12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور 4 ثواني تساوي $90\ m/s$ احسب :

1. السرعة عندما $t = 2$
2. المسافة خلال الفترة [1 , 2]
3. الازاحة بعد مرور 10 ثواني من بدأ الحركة

سـؤال / تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدأ الحركة اصبحت سرعتها $(100 - 6t^2)\ m/s$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ، ثم احسب التعجيل عندها ؟

الفصل الخامس المعادلات

سـؤال / بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلا للمعادلة التفاضلية $xy` = x^2 + y$

سـؤال / برهن ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ حلا للمعادلة التفاضلية $y`` + 4y = 0$

سـؤال / هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة $y\,y'' + (y')^2 - 3x = 5$

سـؤال / بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

سـؤال / هل $yx = \sin 5x$ حلا للمعادلة $xy'' + 2y' + 25yx = 0$

سـؤال / بين ان $y = ae^{-x}$ هو حلا للمعادلة $y' + y = 0$

سـؤال / بين ان $\ln|y| = x^2 + c$, $c \in R$ هو حلا للمعادلة $y'' = 4x^2y + 2y$

سـؤال / اوجد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $y = 9$, $x = 2$ ؟

سـؤال / حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ حيث $y = 0$ عندما $x = 0$ ؟

س/ حل المعادلات:

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$$

$$\tan^2 y\,dy = \sin^3 x\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$$

$$e^{x+2y} + y' = 0$$

$$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$$

سـؤال / حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$ حيث $y = 2$, $x = 2$ ؟